

# Tablice matematyczne

Wszystko, czego potrzebujesz, żeby zdać maturę w jednym miejscu

$$2 >$$

$$0.999... = 1$$

$$\pi \approx$$

$$3.14$$

$$5^2 \div$$

$$\sqrt{2}$$

$$1 + 2 \cdot 3$$

$$(1 - 2) + 3$$

$$5(2 + 2)$$

$$101_2 = 5_{10}$$



**MATMA Z PASJĄ**

## Spis treści:

Wartość bezwzględna liczby.....	3
Potęgi i pierwiastki.....	3
Logarytmy.....	4
Wzory skróconego mnożenia.....	4
Ciągi.....	5
Funkcja kwadratowa.....	6
Geometria analityczna.....	7
Planimetria.....	11
Stereometria (geometria przestrzenna).....	13
Trygonometria.....	15
Prawdopodobieństwo i statystyka.....	18
Statystyka.....	18
Pochodna funkcji i styczna.....	18
Tablica wartości funkcji trygonometrycznych.....	19

## Wartość bezwzględna liczby

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

$$|-x| = |x|$$

$$|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$$

$$\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|} \quad \text{jeśli } y \neq 0$$

## Potęgi i pierwiastki

Niech  $m$ ,  $n$  będą liczbami całkowitymi dodatnimi:

$$a \neq 0 : \quad a^{-n} = \frac{1}{a^n} \quad \text{oraz} \quad a^0 = 1$$

$$a \geq 0 : \quad a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

$$a > 0 : \quad a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$$

Niech  $r$ ,  $s$  będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

Jeżeli  $a > 0$  i  $b > 0$ , to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s}$$

$$\frac{a^r}{a^m} = a^{r-m}$$

$$(a^r)^s = a^{r \cdot s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r$$

$$\left( \frac{a}{b} \right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$



## Logarytmy

$\log_a c = b$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $a^b = c$

$$a^{\log_a c} = c$$

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

## Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb  $a, b$ :

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej  $n$  oraz dowolnych liczb  $a, b$  zachodzi wzór:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^{n-k}b^{k-1} + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$



## Ciągi

### Ciąg arytmetyczny

$$a_n = a_1 + (n - 1)r \quad \text{wzór ogólny}$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

suma ciągu arytmetycznego

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

Twierdzenie sąsiadów - jeżeli  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są kolejnymi wyrazami ciągu arytmetycznego, to:  $2b = a + c$

### Ciąg geometryczny

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2 \quad \text{wzór ogólny}$$

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla } q \neq 1 \quad \text{suma ciągu geometrycznego}$$

Twierdzenie sąsiadów - jeżeli  $a$ ,  $b$ ,  $c$  są kolejnymi wyrazami ciągu geometrycznego, to:  $b^2 = a \cdot c$

### Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego

$$S = \lim_{x \rightarrow \infty} S_n = \frac{a_1}{1 - q}$$

### Procent składany

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$



## Funkcja kwadratowa

$$f(x) = ax^2 + bx + c \quad \text{dla } a \neq 0, x \in \mathbb{R} \quad \text{postać ogólna}$$

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{jeśli } \Delta > 0 \quad \text{postać iloczynowa}$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$f(x) = a(x - p)^2 + q \quad \text{postać kanoniczna}$$

$$p = -\frac{b}{2a} \quad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad q = f(p)$$

## Wzory Viete'a

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$



## Odcinek

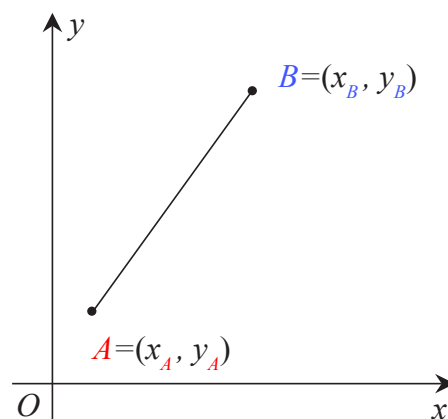
$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Współrzędne środka odcinka  $|AB|$

$$S_{AB} = \left( \frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2} \right)$$

## Wektory

$\vec{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$  współrzędne wektora  $\vec{AB}$

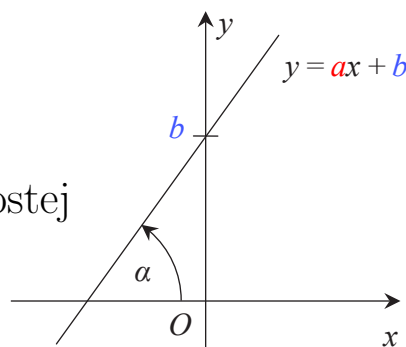


## Prosta

$Ax + By + C = 0$  równanie ogólne prostej

$y = ax + b$  równanie kierunkowe prostej

Liczba  $a$  to współczynnik kierunkowy prostej



$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Równanie prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty

$$A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B)$$

$$(y - y_A)(x_B - x_A) - (y_B - y_A)(x - x_A) = 0$$



## Prosta i punkt

Odległość punktu  $P = (x_0, y_0)$  od prostej o równaniu  $Ax + By + C = 0$  jest dana wzorem:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

## Proste równoległe, proste prostopadłe

$$y = a_1x + b_1 \quad y = a_2x + b_2$$

są równoległe, gdy  $a_1 = a_2$

są prostopadłe, gdy  $a_1a_2 = -1$

$$a_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0$$

są równoległe, gdy  $A_1B_2 - A_2B_1 = 0$

są prostopadłe, gdy  $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

## Wzór na pole trójkąta

$$A = (x_A, y_A) \quad B = (x_B, y_B) \quad C = (x_C, y_C)$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$





## Równanie okręgu

$$S = (a, b) \quad r > 0:$$

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \text{ lub}$$

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + c = 0 \text{ gdy } r^2 = a^2 + b^2 - c > 0$$

## Twierdzenie sinusów

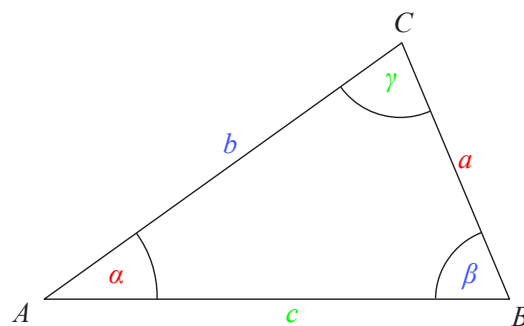
$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

## Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos\beta$$

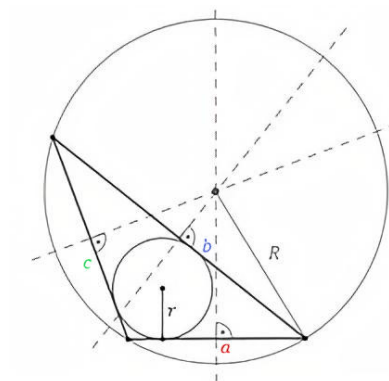
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos\gamma$$



## Trójkąt dowolny

Promień okręgu wpisanego  $r = \frac{2P}{Obw}$

Promień okręgu opisanego  $R = \frac{abc}{4P}$



## Wzory na pole trójkąta

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot a \cdot h_a = \frac{1}{2} \cdot b \cdot h_b = \frac{1}{2} \cdot c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma = \frac{1}{2} a \cdot c \cdot \sin \beta = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin \alpha$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R}$$

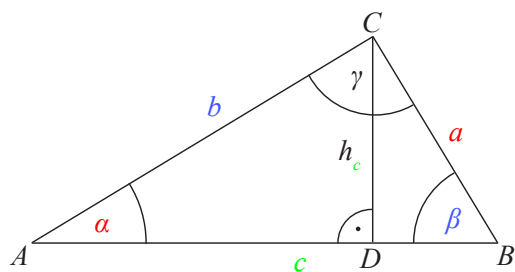
$$P_{\Delta ABC} = 2R^2 \cdot \sin \alpha \cdot \sin \beta \cdot \sin \gamma$$

$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

## Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

$$h_c^2 = |AD| \cdot |DB|$$

$$h_c = \frac{ab}{c}$$



Promień okręgu opisanego

$$R = \frac{1}{2}c$$

Promień okręgu opisanego

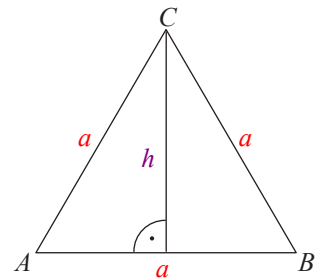
$$r = \frac{a+b-c}{2} = p - c$$



## Trójkąt równoboczny

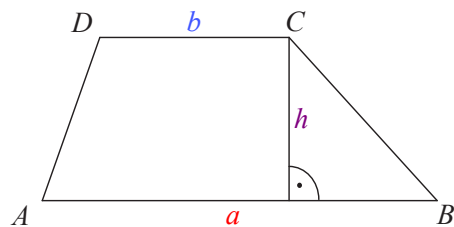
$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \quad R = \frac{2}{3}h$$

$$P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \quad r = \frac{1}{3}h$$



## Trapez

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$

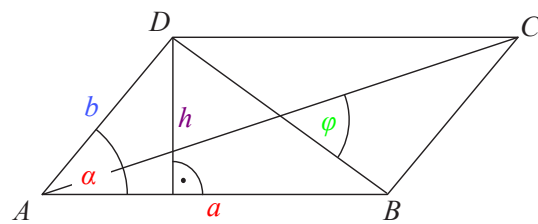


## Równoległobok

$$P = ah$$

$$P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\varphi$$

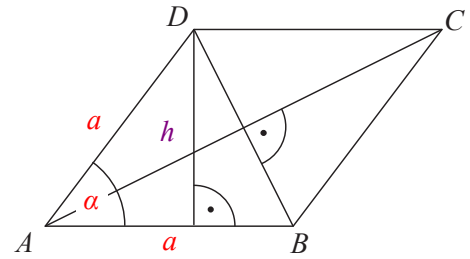


Romb

$$P = ah$$

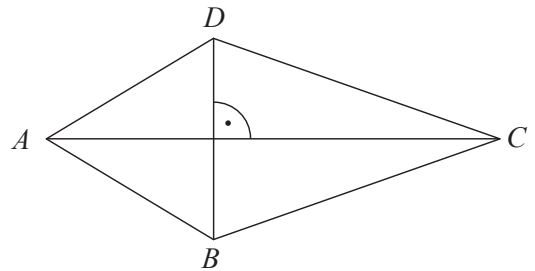
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$

$$P = a^2 \cdot \sin\alpha$$



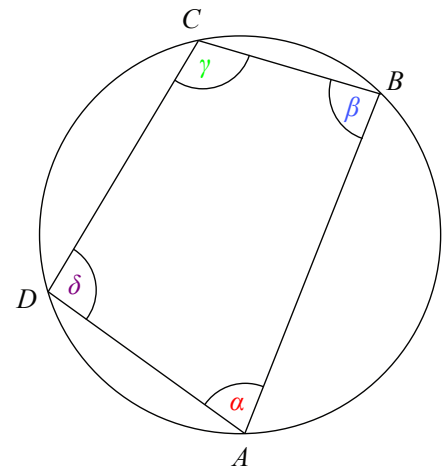
Deltoid

$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



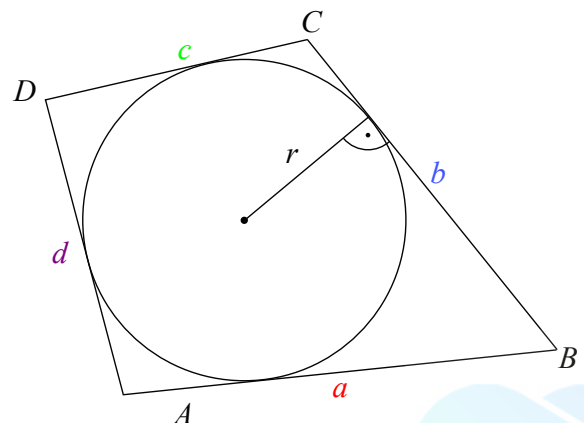
Okrag opisany na czworokacie

$$\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180^\circ$$



Okrag wpisany w czworokat

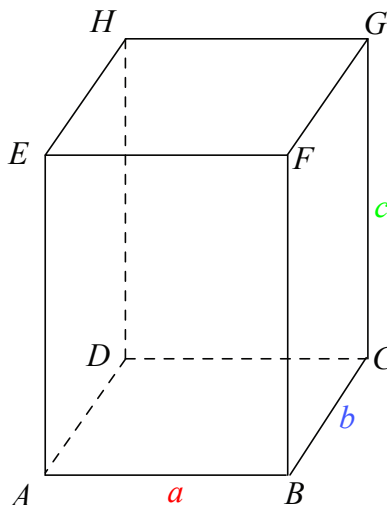
$$a + c = b + d$$



## Prostopadłościan

$$P = 2(ab + bc + ac)$$

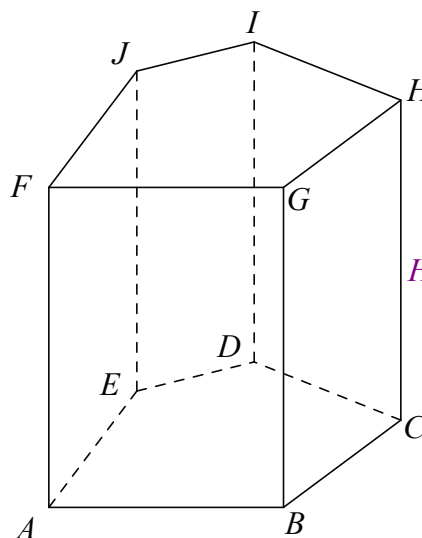
$$V = abc$$



## Graniastosłup prosty

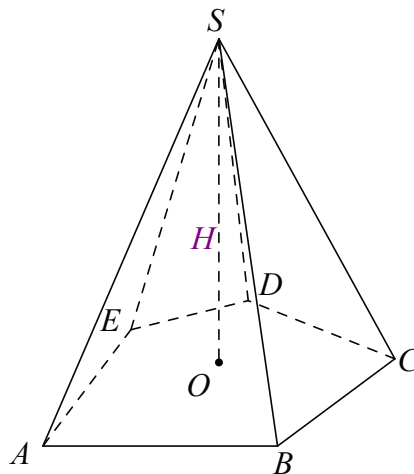
$$P_b = 2p \cdot H$$

$$V = P_p \cdot H$$



## Ostrosłup

$$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H$$

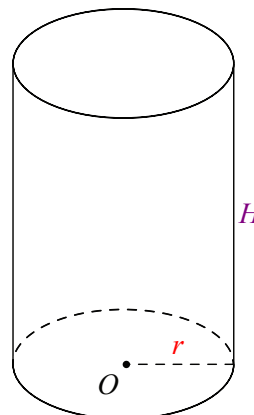


## Walec

$$P_b = 2\pi rH$$

$$P = 2\pi r(r + H)$$

$$V = \pi r^2 H$$

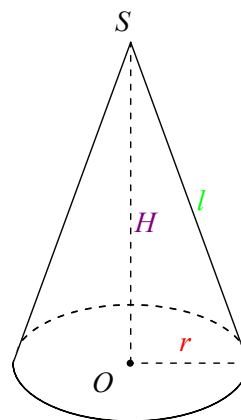


## Stożek

$$P_b = \pi r l$$

$$P = \pi r(r + l)$$

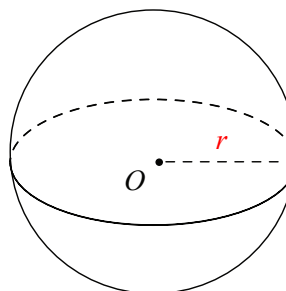
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 H$$



## Kula

$$P = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



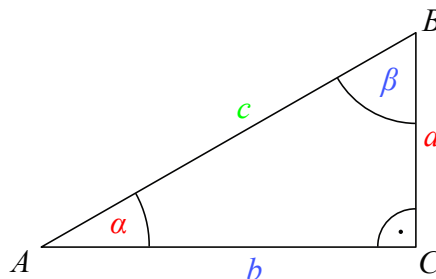
## Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w

trójkącie prostokątnym:

$$\sin \alpha = \frac{a}{c} \quad \sin \beta = \frac{b}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c} \quad \cos \beta = \frac{a}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b} \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{b}{a}$$



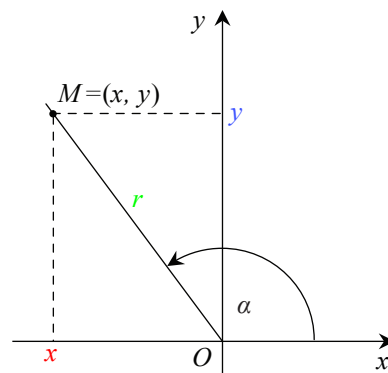
## Definicje funkcji trygonometrycznych

$$\sin \alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos \alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{y}{x} \quad \text{gdy } x \neq 0$$

$$\text{gdzie } r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



## Związki między funkcjami tego samego kąta

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \text{dla } \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \text{ całkowite}$$



## Funkcje sumy i różnicy kątów

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

## Funkcje podwójnego kąta

$$\sin 2\alpha = 2 \sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha$$

## Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 \cos\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha \sin\beta = -\frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta))$$

$$\cos\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$$

$$\sin\alpha \cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$





## Wybrane wzory redukcyjne

$$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$$

$$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$$

$$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$$

## Niektóre wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha$	$0^\circ$	$30^\circ$	$45^\circ$	$60^\circ$	$90^\circ$
	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje



## Prawdopodobieństwo i statystyka

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \quad P(A \setminus B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Średnia arytmetyczna  $\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$

Średnia ważona  $\frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \dots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \dots + w_n}$

Średnia geometryczna  $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$

## Pochodna iloczynu i ilorazu funkcji

$$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2} \quad \text{gdzie } g(x) \neq 0$$

## Pochodne niektórych funkcji

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = \sqrt{x}, x \geq 0$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \frac{a}{x}, x \neq 0$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = nx^{n-1}$

## Równanie stycznej w punkcie $P = (x_p, y_p)$

$$y = f'(x_p) \cdot (x - x_p) + f(x_p)$$



# Tablica wartości funkcji trygonometrycznych

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
<b>0</b>	<b>0,0000</b>	<b>0,0000</b>	<b>90</b>
1	0,0175	0,0175	89
2	0,0349	0,0349	88
3	0,0523	0,0524	87
4	0,0698	0,0699	86
5	0,0872	0,0875	85
6	0,1045	0,1051	84
7	0,1219	0,1228	83
8	0,1392	0,1405	82
9	0,1564	0,1584	81
<b>10</b>	<b>0,1736</b>	<b>0,1763</b>	<b>80</b>
11	0,1908	0,1944	79
12	0,2079	0,2126	78
13	0,2250	0,2309	77
14	0,2419	0,2493	76
15	0,2588	0,2679	75
16	0,2756	0,2867	74
17	0,2924	0,3057	73
18	0,3090	0,3249	72
19	0,3256	0,3443	71
<b>20</b>	<b>0,3420</b>	<b>0,3640</b>	<b>70</b>
21	0,3584	0,3839	69
22	0,3746	0,4040	68
23	0,3907	0,4245	67
24	0,4067	0,4452	66
25	0,4226	0,4663	65
26	0,4384	0,4877	64
27	0,4540	0,5095	63
28	0,4695	0,5317	62
29	0,4848	0,5543	61
<b>30</b>	<b>0,5000</b>	<b>0,5774</b>	<b>60</b>
31	0,5150	0,6009	59
32	0,5299	0,6249	58
33	0,5446	0,6494	57
34	0,5592	0,6745	56
35	0,5736	0,7002	55
36	0,5878	0,7265	54
37	0,6018	0,7536	53
38	0,6157	0,7813	52
39	0,6293	0,8098	51
<b>40</b>	<b>0,6428</b>	<b>0,8391</b>	<b>50</b>
41	0,6561	0,8693	49
42	0,6691	0,9004	48
43	0,6820	0,9325	47
44	0,6947	0,9657	46
45	0,7071	1,0000	45

$\alpha [^\circ]$	$\sin \alpha$ $\cos \beta$	$\operatorname{tg} \alpha$	$\beta [^\circ]$
46	0,7193	1,0355	44
47	0,7314	1,0724	43
48	0,7431	1,1106	42
49	0,7547	1,1504	41
<b>50</b>	<b>0,7660</b>	<b>1,1918</b>	<b>40</b>
51	0,7771	1,2349	39
52	0,7880	1,2799	38
53	0,7986	1,3270	37
54	0,8090	1,3764	36
55	0,8192	1,4281	35
56	0,8290	1,4826	34
57	0,8387	1,5399	33
58	0,8480	1,6003	32
59	0,8572	1,6643	31
<b>60</b>	<b>0,8660</b>	<b>1,7321</b>	<b>30</b>
61	0,8746	1,8040	29
62	0,8829	1,8807	28
63	0,8910	1,9626	27
64	0,8988	2,0503	26
65	0,9063	2,1445	25
66	0,9135	2,2460	24
67	0,9205	2,3559	23
68	0,9272	2,4751	22
69	0,9336	2,6051	21
<b>70</b>	<b>0,9397</b>	<b>2,7475</b>	<b>20</b>
71	0,9455	2,9042	19
72	0,9511	3,0777	18
73	0,9563	3,2709	17
74	0,9613	3,4874	16
75	0,9659	3,7321	15
76	0,9703	4,0108	14
77	0,9744	4,3315	13
78	0,9781	4,7046	12
79	0,9816	5,1446	11
<b>80</b>	<b>0,9848</b>	<b>5,6713</b>	<b>10</b>
81	0,9877	6,3138	9
82	0,9903	7,1154	8
83	0,9925	8,1443	7
84	0,9945	9,5144	6
85	0,9962	11,4301	5
86	0,9976	14,3007	4
87	0,9986	19,0811	3
88	0,9994	28,6363	2
89	0,9998	57,2900	1
<b>90</b>	<b>1,0000</b>	<b>-</b>	<b>0</b>

**Przygotowujesz się do matury?  
Potrzebujesz pomocy?**

**Zerknij na "Akademia MzP"!**

**Jest to kompleksowy kurs online, z którego nauczysz się wszystkiego, żeby zdać maturę z matematyki na poziomie podstawowym lub rozszerzonym z wynikiem nawet 100%!**

**[Sprawdzam MzP! \\*click\\*](#)**

Zadania przygotowane przez:



Znajdziesz nas:

