Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki

POZIOM PODSTAWOWY

MATMA Z PASJĄ

SPIS TREŚCI

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0.

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r \cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0, y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a(x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

4. WZORY SKRÓCONEGO MNOŻENIA

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

5. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2 + bx + c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.
- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.

- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2 + bx + c$

  (liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2 + bx + c = 0$) zależy od wyróżnika Δ:

1. jeżeli $\mathbf{\Delta > 0}$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. jeżeli $\mathbf{\Delta = 0}$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. jeżeli $\mathbf{\Delta < 0}$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x - p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$

6. Ciągi

- Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n - 1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n - 1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } \ n \geq 2$$

- Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } \ n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \quad \text{dla} \quad q \neq 1 \qquad\qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla} \quad q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \quad \text{dla } \ n \geq 2$$

- Procent składany

  Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

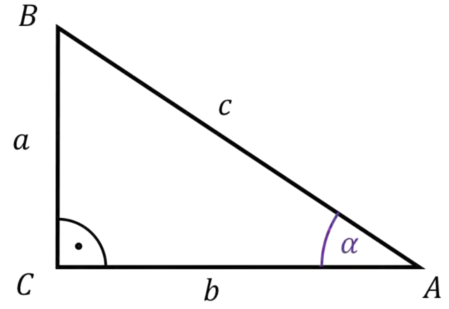
7. Trygonometria

- Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta</u>

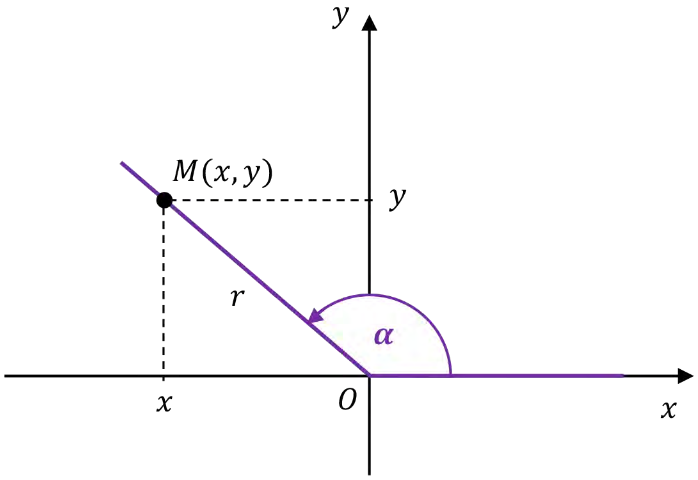
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

gdzie

$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- <u>Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</u>

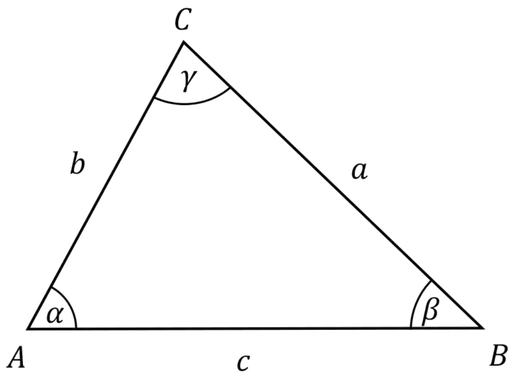
$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- <u>Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów</u>

α	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

8. Planimetria



Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c – długości boków w trójkącie ABC

α, β, γ – miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C

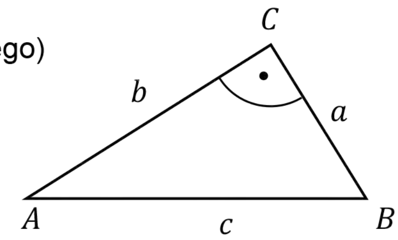
R, r – długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC

h_a, h_b, h_c – wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C.

p – połowa obwodu trójkąta ABC, tj.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

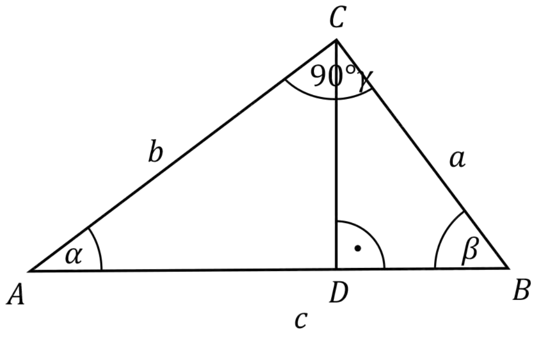
$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

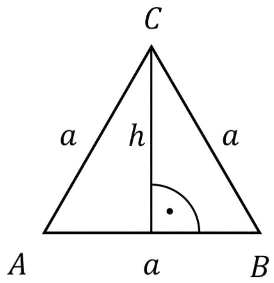


- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

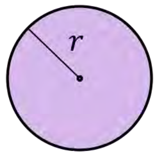
$$r = \frac{1}{3}h \qquad R = \frac{2}{3}h$$



- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$



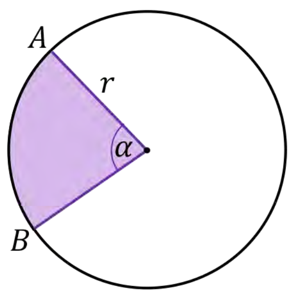
Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:

$$P = \frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$$



Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

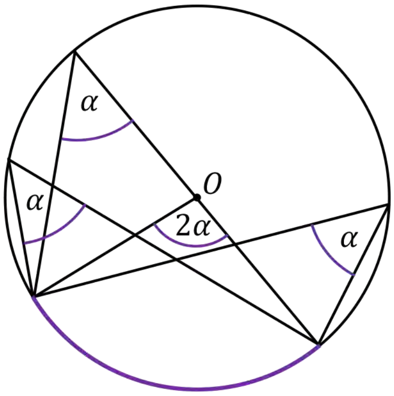
$$L = \frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$$

- <u>Kąty w okręgu</u>

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

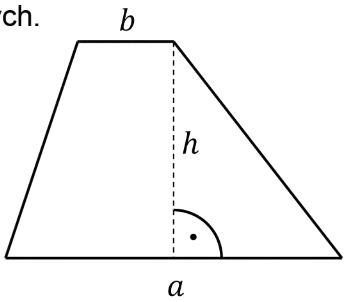
Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.



- <u>Czworokąty</u>

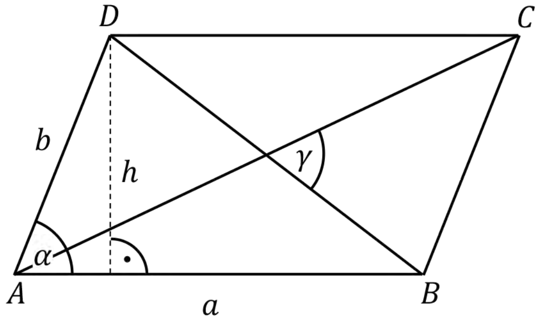
Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



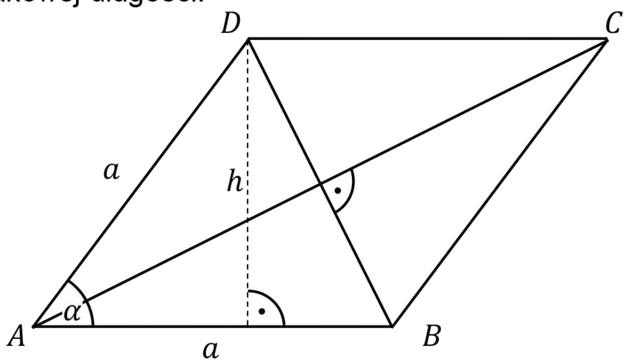
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- Pola figur podobnych

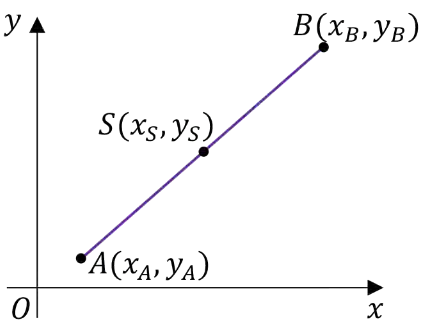
Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

9. Geometria analityczna na płaszczyźnie kartezjańskiej

- Długość odcinka

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

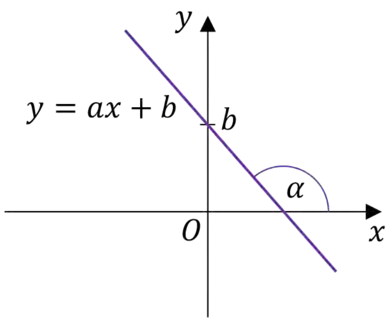
- Współrzędne środka odcinka

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- Równanie kierunkowe prostej

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to można opisać ją równaniem kierunkowym:



$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

gdzie

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{gdy} \quad x_B \neq x_A$$

- Proste równoległe

  Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

- Równanie okręgu

  Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

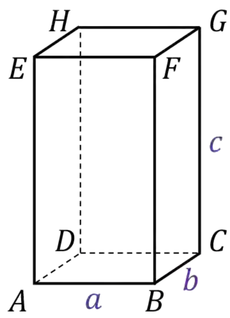
$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

10. STEREOMETRIA

- Prostopadłościan

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$
$$V = abc$$

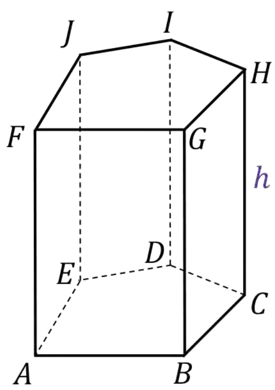
gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu



- Graniastosłup prosty

$$P_b = Ob \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

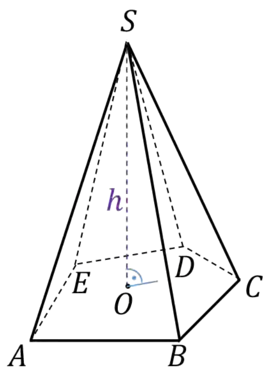
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa, natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- Ostrosłup

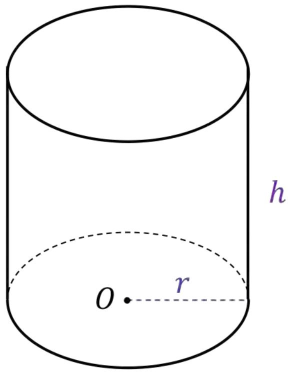
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



- <u>Walec</u>

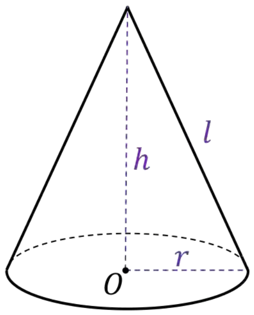
$$P_b = 2\pi rh$$
$$P_c = 2\pi r(r+h)$$
$$V = \pi r^2 h$$



gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.

- <u>Stożek</u>

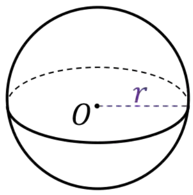
$$P_b = \pi rl$$
$$P_c = \pi r(r+l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

- <u>Kula</u>

$$P_c = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

11. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- <u>Własności prawdopodobieństwa</u>

Niech Ω będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast P – prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Wtedy:

$P(A') = 1 - P(A)$ gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ dla każdych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

12. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \ldots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

Potrzebujesz pomocy w przygotowaniu się do do matury?

SPRAWDŹ AMzP