Wybrane wzory matematyczne na egzamin maturalny z matematyki

POZIOM PODSTAWOWY I ROZSZERZONY

MATMA Z PASJĄ

SPIS TREŚCI

1. WARTOŚĆ BEZWZGLĘDNA LICZBY

- Wartość bezwzględną liczby rzeczywistej x definiujemy wzorem:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{dla } x \geq 0 \\ -x & \text{dla } x < 0 \end{cases}$$

Liczba $|x|$ jest to odległość na osi liczbowej punktu o współrzędnej x od punktu o współrzędnej 0.

Ponadto, jeśli $y \neq 0$, to:

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$$

2. POTĘGI I PIERWIASTKI

- Pierwiastkiem arytmetycznym $\sqrt[n]{a}$ stopnia n z liczby $a \geq 0$ nazywamy liczbę $b \geq 0$ taką, że $b^n = a$.

W szczególności, dla każdej liczby rzeczywistej a prawdziwa jest równość:

$$\sqrt{a^2} = |a|$$

Jeżeli $a < 0$ oraz liczba n jest nieparzysta, to $\sqrt[n]{a}$ oznacza liczbę $b < 0$ taką, że $b^n = a$.

W zbiorze liczb rzeczywistych pierwiastki stopni parzystych z liczb ujemnych nie istnieją.

- Niech m, n będą liczbami całkowitymi dodatnimi. Definiujemy:

– dla $a \neq 0$: $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ oraz $a^0 = 1$

– dla $a \geq 0$: $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

– dla $a > 0$: $a^{-\frac{m}{n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a^m}}$

- Niech r, s będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi. Jeśli $a > 0$ i $b > 0$, to:

$$a^r \cdot a^s = a^{r+s} \qquad (a^r)^s = a^{r\cdot s} \qquad \frac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$$

$$(a \cdot b)^r = a^r \cdot b^r \qquad \left(\frac{a}{b}\right)^r = \frac{a^r}{b^r}$$

Jeżeli wykładniki r, s są liczbami całkowitymi, to powyższe wzory obowiązują dla wszystkich liczb $a \neq 0$ i $b \neq 0$.

- Niech x, y będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.
  Jeżeli $a \in (0, 1)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x > y$.
  Jeżeli $a \in (1, +\infty)$, to nierówność $a^x < a^y$ jest równoważna nierówności $x < y$.

3. LOGARYTMY

- Niech $a > 0$ i $a \neq 1$. Logarytmem $\log_a b$ liczby $b > 0$ przy podstawie a nazywamy wykładnik c potęgi, do której należy podnieść a, aby otrzymać b:

$$\log_a b = c \qquad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \qquad a^c = b$$

Równoważnie:

$$a^{\log_a b} = b$$

- Dla dowolnych liczb rzeczywistych $x > 0$, $y > 0$ oraz r prawdziwe są równości:

$$\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y \qquad \log_a x^r = r \cdot \log_a x$$

$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

Wzór na zamianę podstawy logarytmu:

jeżeli $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$ oraz $c > 0$, to:

$$\log_b c = \frac{\log_a c}{\log_a b}$$

W szczególności:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

Zapisy $\log x$ oraz $\lg x$ oznaczają $\log_{10} x$.

4. SILNIA. WSPÓŁCZYNNIK DWUMIANOWY

- Silnią liczby całkowitej dodatniej n nazywamy iloczyn kolejnych liczb całkowitych od 1 do n włącznie:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot n$$

Ponadto przyjmujemy umowę, że $0! = 1$.

- Dla liczb całkowitych n, k spełniających warunki $0 \leq k \leq n$ definiujemy współczynnik dwumianowy $\binom{n}{k}$ (symbol Newtona):

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Prawdziwe są równości:

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!}$$

$$\binom{n}{0} = 1 \qquad \binom{n}{1} = n \qquad \binom{n}{n-1} = n \qquad \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} \qquad \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

5. Wzór dwumianowy Newtona

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + \binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a-b)^n = \binom{n}{0}a^n - \binom{n}{1}a^{n-1}b + \ldots + (-1)^k\binom{n}{k}a^{n-k}b^k + \ldots + (-1)^n\binom{n}{n}b^n$$

6. Wzory skróconego mnożenia

Dla dowolnych liczb rzeczywistych a, b:

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2 \qquad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Dla dowolnej liczby całkowitej dodatniej n oraz dowolnych liczb rzeczywistych a, b mamy:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + a^{n-k}b^{k-1} + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

W szczególności:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)$$

7. FUNKCJA KWADRATOWA

- Wyróżnikiem Δ trójmianu kwadratowego ax^2+bx+c $(a \neq 0,\ b,\ c \in \mathbb{R})$ zmiennej rzeczywistej x nazywamy liczbę

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

- Postać ogólna funkcji kwadratowej: $f(x) = ax^2+bx+c,\ a \neq 0,\ b, c \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}$.
- Wykresem funkcji kwadratowej jest parabola o wierzchołku w punkcie

$$W = (p, q) \quad \text{gdzie} \quad p = -\frac{b}{2a}, \qquad q = -\frac{\Delta}{4a}$$

Gdy $a < 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku dołowi. Gdy $a > 0$, to ramiona paraboli skierowane są ku górze.

- Liczba miejsc zerowych funkcji kwadratowej $f(x) = ax^2+bx+c$

(liczba pierwiastków trójmianu kwadratowego, liczba rzeczywistych rozwiązań równania kwadratowego $ax^2+bx+c=0$) zależy od wyróżnika Δ:

1. jeżeli $\boldsymbol{\Delta > 0}$, to funkcja kwadratowa ma dwa miejsca zerowe (trójmian kwadratowy ma dwa różne pierwiastki rzeczywiste, równanie kwadratowe ma dwa rozwiązania rzeczywiste):

$$x_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

2. jeżeli $\boldsymbol{\Delta = 0}$, to funkcja kwadratowa ma dokładnie jedno miejsce zerowe (trójmian kwadratowy ma jeden pierwiastek, równanie kwadratowe ma dokładnie jedno rozwiązanie rzeczywiste):

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

3. jeżeli $\boldsymbol{\Delta < 0}$, to funkcja kwadratowa nie ma miejsc zerowych (trójmian kwadratowy nie ma pierwiastków rzeczywistych, równanie kwadratowe nie ma rozwiązań rzeczywistych).

- Postać kanoniczna funkcji kwadratowej:

$$f(x) = a(x-p)^2 + q$$

- Jeżeli $\Delta \geq 0$, to funkcję kwadratową można przedstawić w postaci iloczynowej:

$$f(x) = a(x-x_1)(x-x_2)$$

- Wzory Viète'a

  Jeżeli $\Delta \geq 0$, to

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

8. CIĄGI

- Wzór na n-ty wyraz ciągu arytmetycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i różnicy r:

$$a_n = a_1 + (n-1)r$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu arytmetycznego:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \qquad S_n = \frac{2a_1 + (n-1)r}{2} \cdot n$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu arytmetycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzór na n-ty wyraz ciągu geometrycznego (a_n), określonego dla $n \geq 1$, o pierwszym wyrazie a_1 i ilorazie q:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1} \quad \text{dla } n \geq 2$$

- Wzory na sumę S_n początkowych n wyrazów ciągu geometrycznego:

$$S_n = a_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q} \quad \text{dla } q \neq 1 \qquad S_n = n \cdot a_1 \quad \text{dla } q = 1$$

- Dla sąsiednich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n) prawdziwa jest równość:

$$(a_n)^2 = a_{n-1} \cdot a_{n+1} \text{ dla } n \geq 2$$

- <u>Suma wyrazów nieskończonego ciągu geometrycznego</u>

  Dany jest nieskończony ciąg geometryczny (a_n), określony dla $n \geq 1$, o ilorazie q. Niech (S_n) oznacza ciąg sum początkowych wyrazów ciągu (a_n), to znaczy ciąg określony wzorem $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ dla $n \geq 1$.

  Jeżeli $|q| < 1$, to ciąg (S_n) ma granicę równą:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{a_1}{1-q}$$

  Granicę tę nazywamy sumą wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego (a_n).

- <u>Twierdzenie o trzech ciągach</u>

  Jeżeli wyrazy ciągów (a_n), (b_n) i (c_n), określonych dla $n \geq 1$, spełniają nierówność $a_n \leq b_n \leq c_n$ dla $n \geq 1$, a ciągi (a_n) i (c_n) są zbieżne do wspólnej granicy $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = g$, to ciąg (b_n) jest zbieżny, a ponadto $\lim_{n\to\infty} b_n = g$.

- <u>Procent składany</u>

  Jeżeli kapitał początkowy K_0 złożymy na okres n lat na lokacie bankowej, której oprocentowanie wynosi $p\%$ w skali rocznej, a kapitalizacja odsetek następuje po upływie każdego roku trwania lokaty, to kapitał końcowy K_n jest określony wzorem:

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

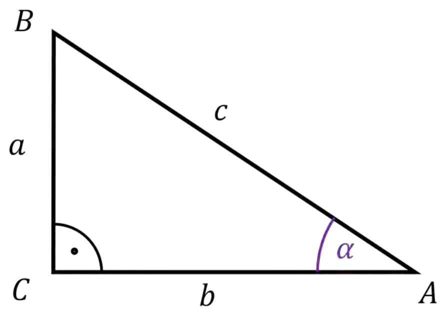
9. TRYGONOMETRIA

- <u>Definicje funkcji trygonometrycznych kąta ostrego w trójkącie prostokątnym</u>

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos\alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$$



- Definicje funkcji trygonometrycznych dowolnego kąta

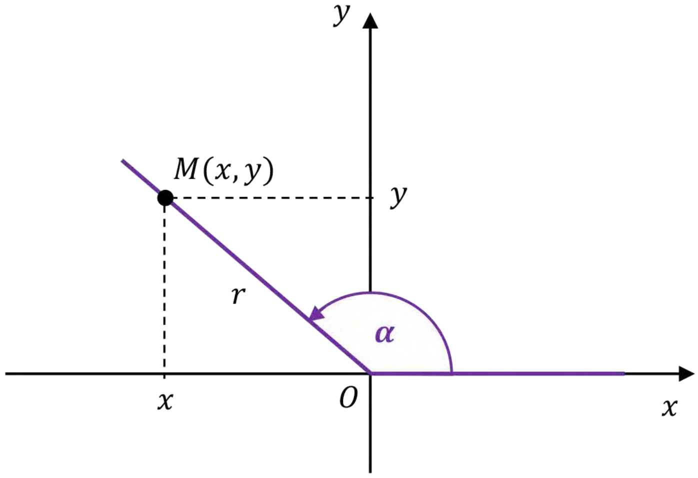
$$\sin\alpha = \frac{y}{r}$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}$$

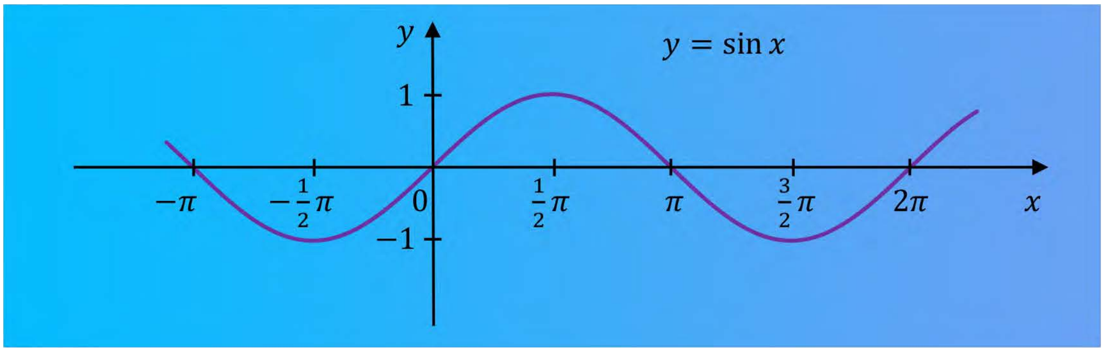
$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}, \qquad \text{o ile } x \neq 0$$

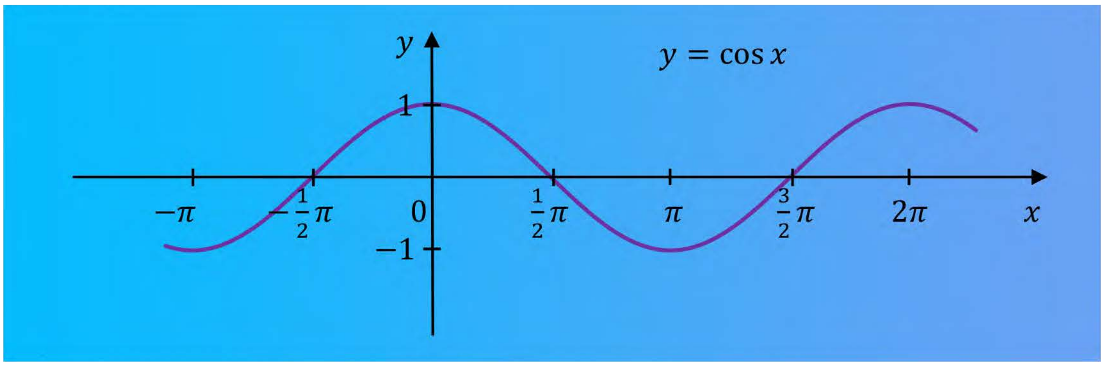
gdzie

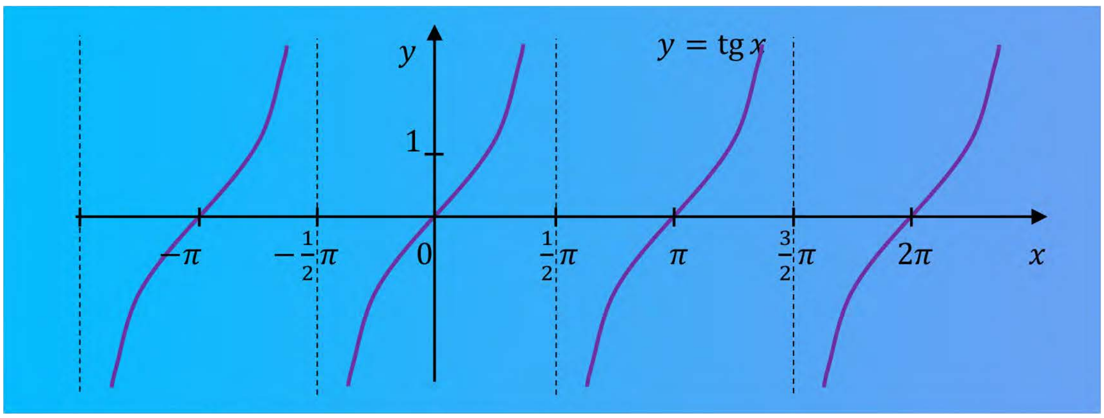
$$r = |OM| = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$$



- Wykresy funkcji trygonometrycznych







- <u>Związki między funkcjami trygonometrycznymi tego samego kąta</u>

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \text{dla} \quad \alpha \neq \frac{1}{2}\pi + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- <u>Wartości funkcji trygonometrycznych dla wybranych kątów</u>

α	0°	30°	45°	60°	90°
	0	$\frac{1}{6}\pi$	$\frac{1}{4}\pi$	$\frac{1}{3}\pi$	$\frac{1}{2}\pi$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	nie istnieje

- <u>Funkcje trygonometryczne sumy i różnicy kątów</u>

Dla dowolnych kątów α oraz β prawdziwe są równości:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

Ponadto:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \text{gdy} \quad \alpha, \beta, \alpha+\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta} \qquad \text{gdy} \quad \alpha, \beta, \alpha-\beta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- Funkcje trygonometryczne podwojonego kąta

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$$

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha} \quad \text{o ile } \operatorname{tg}\alpha \text{ istnieje i } \operatorname{tg}^2\alpha \neq 1$$

- Wybrane wzory redukcyjne

$\sin(90^\circ - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	
$\sin(90^\circ + \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(90^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	
$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(180^\circ - \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha$
$\sin(180^\circ + \alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(180^\circ + \alpha) = -\cos\alpha$	$\operatorname{tg}(180^\circ + \alpha) = \operatorname{tg}\alpha$

- Sumy, różnice i iloczyny funkcji trygonometrycznych

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

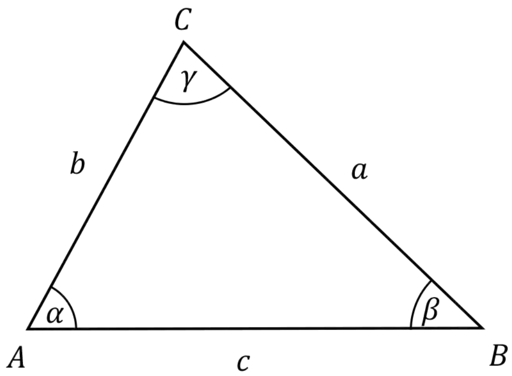
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta = -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

10. PLANIMETRIA

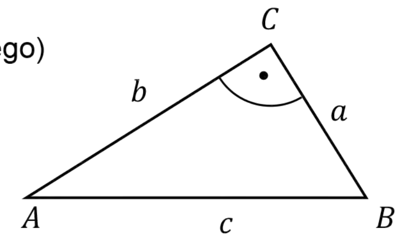


Przyjmujemy następujące oznaczenia w trójkącie ABC:

a, b, c	– długości boków w trójkącie ABC
α, β, γ	– miary kątów wewnętrznych trójkąta leżących, odpowiednio, przy wierzchołkach A, B oraz C
R, r	– długości promieni okręgów, odpowiednio, opisanego i wpisanego w trójkąt ABC
h_a, h_b, h_c	– wysokości trójkąta opuszczone, odpowiednio, z wierzchołków A, B i C.
p	– połowa obwodu trójkąta ABC, tj.

$$p = \frac{a+b+c}{2}$$

- Twierdzenie Pitagorasa (wraz z twierdzeniem odwrotnym do niego)



Jeżeli w trójkącie ABC kąt γ jest kątem prostym, to:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Jeżeli w trójkącie ABC długości boków spełniają równość $a^2 + b^2 = c^2$, to kąt γ jest kątem prostym.

- Twierdzenie sinusów

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R \qquad \frac{b}{\sin\beta} = 2R \qquad \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

- Twierdzenie cosinusów

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$$

- Wzory na pole trójkąta ABC

$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}a \cdot h_a = \frac{1}{2}b \cdot h_b = \frac{1}{2}c \cdot h_c$$

$$P_{\Delta \mathrm{ABC}} = \frac{1}{2}ab \cdot \sin\gamma = \frac{1}{2}bc \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}ca \cdot \sin\beta$$

$$P_{\Delta ABC} = \frac{abc}{4R} \qquad P_{\Delta ABC} = p \cdot r$$

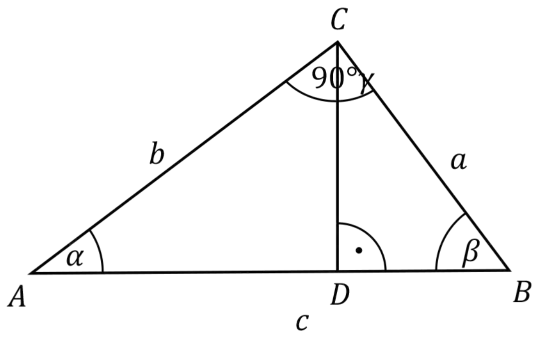
$$P_{\Delta ABC} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

- Związki miarowe w trójkącie prostokątnym

Przyjmijmy, że w trójkącie ABC kąt przy wierzchołku C jest kątem prostym. Niech D będzie spodkiem wysokości opuszczonej z wierzchołka C na podstawę AB trójkąta. Wówczas:

$$h_c = \sqrt{|AD| \cdot |DB|} \qquad h_c = \frac{ab}{c}$$

$$r = \frac{a+b-c}{2} \qquad R = \frac{1}{2}c$$

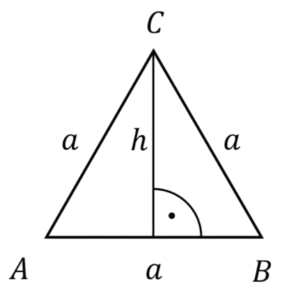


- Związki miarowe w trójkącie równobocznym

a – długość boku trójkąta równobocznego
h – wysokość trójkąta równobocznego

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2} \qquad P_{\Delta} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

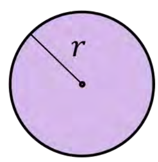
$$r = \frac{1}{3}h \qquad R = \frac{2}{3}h$$



- Koło

Pole P koła o promieniu r jest równe:

$$P = \pi r^2$$

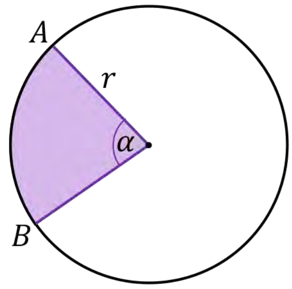


Obwód L koła o promieniu r jest równy:

$$L = 2\pi r$$

- Wycinek koła

Pole P wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równe:



$$P = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot \pi r^2$$

Długość L łuku AB wycinka koła o promieniu r i kącie środkowym α wyrażonym w stopniach jest równa:

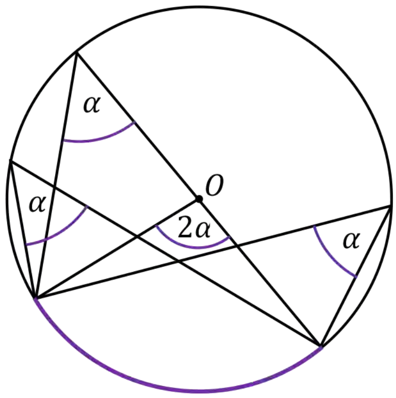
$$L = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot 2\pi r$$

- Kąty w okręgu

Miara kąta wpisanego w okrąg o środku O jest równa połowie miary kąta środkowego, opartego na tym samym łuku.

W szczególności kąt wpisany oparty na półokręgu jest kątem prostym.

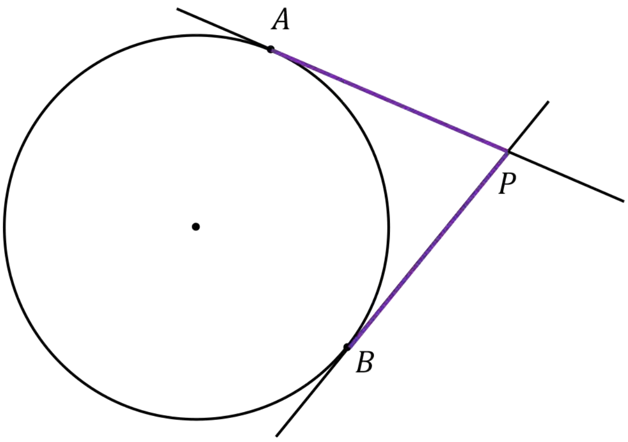
Miary kątów wpisanych w okrąg o środku O, opartych na tym samym łuku, są równe.



- Twierdzenie o odcinkach stycznych

Jeżeli styczne do okręgu w punktach A i B przecinają się w punkcie P, to:

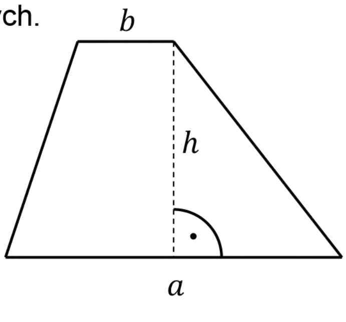
$$|PA| = |PB|$$



- Czworokąty

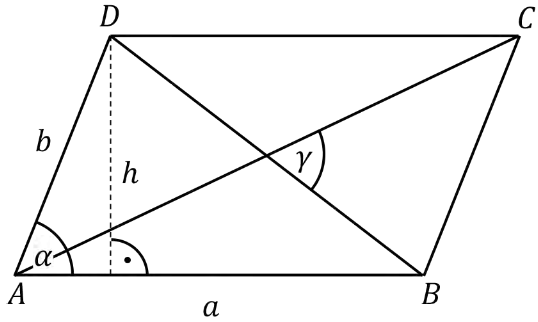
Trapez – czworokąt, który ma co najmniej jedną parę boków równoległych.
Wzór na pole P trapezu:

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot h$$



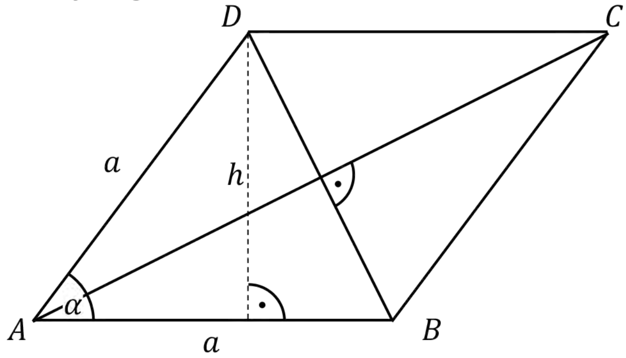
Równoległobok – czworokąt, który ma dwie pary boków równoległych.
Wzory na pole P równoległoboku:

$$P = ah \qquad P = a \cdot b \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD| \cdot \sin\gamma$$



Romb – czworokąt, który ma wszystkie boki jednakowej długości.
Wzory na pole P rombu:

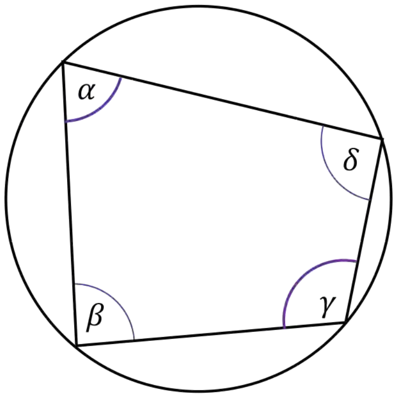
$$P = ah \qquad P = a^2 \cdot \sin\alpha$$
$$P = \frac{1}{2} \cdot |AC| \cdot |BD|$$



- <u>Okrąg opisany na czworokącie</u>

  Na czworokącie można opisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy miar jego przeciwległych kątów wewnętrznych są równe $180°$.

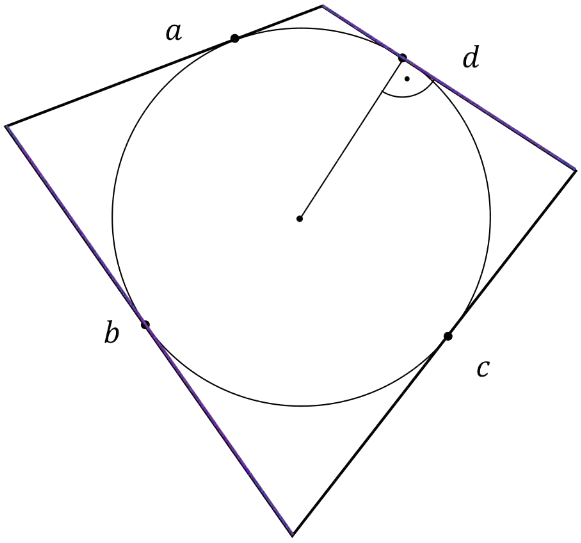
$$\alpha + \gamma = \beta + \delta$$
$$\alpha + \gamma = 180° \qquad \beta + \delta = 180°$$



- <u>Okrąg wpisany w czworokąt</u>

  W czworokąt wypukły można wpisać okrąg wtedy i tylko wtedy, gdy sumy długości jego przeciwległych boków są równe.

$$a + c = b + d$$



- <u>Pola figur podobnych</u>

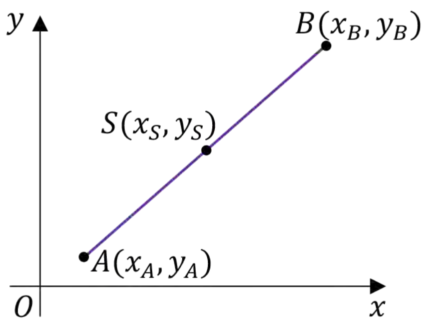
Jeżeli figura $\mathcal{B}$ o polu $P_{\mathcal{B}}$ jest podobna do figury $\mathcal{A}$ o polu $P_{\mathcal{A}}$ (różnym od zera) w skali k, to stosunek pól tych figur jest równy kwadratowi skali podobieństwa.

$$\frac{P_{\mathcal{B}}}{P_{\mathcal{A}}} = k^2$$

11. GEOMETRIA ANALITYCZNA NA PŁASZCZYŹNIE KARTEZJAŃSKIEJ

- <u>Długość odcinka</u>

Długość odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ jest równa:



$$|AB| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

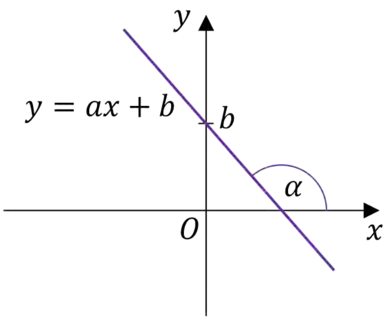
- <u>Współrzędne środka odcinka</u>

Współrzędne środka $S = (x_S, y_S)$ odcinka AB o końcach w punktach $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$ są równe:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2} \qquad y_S = \frac{y_A + y_B}{2}$$

- <u>Równanie kierunkowe prostej</u>

Jeżeli prosta nie jest równoległa do osi Oy, to można opisać ją równaniem kierunkowym:



$$y = ax + b$$

Liczba a to współczynnik kierunkowy prostej.

$$a = \operatorname{tg} \alpha$$

Prosta o równaniu $y = ax + b$ przecina oś Oy w punkcie $(0, b)$.

- Równanie kierunkowe prostej, która przechodzi przez dwa dane punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$:

$$y - y_A = a(x - x_A)$$

gdzie

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} \qquad \text{gdy} \quad x_B \neq x_A$$

- Proste równoległe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są równoległe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 = a_2$$

- Proste prostopadłe

Dwie proste o równaniach kierunkowych $y = a_1x + b_1$ oraz $y = a_2x + b_2$ są prostopadłe wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$a_1 \cdot a_2 = -1$$

- Odległość punktu od prostej

Odległość d punktu $P(x_0, y_0)$ od prostej o równaniu ogólnym $Ax + By + C = 0$ jest równa:

$$d = \frac{|A \cdot x_0 + B \cdot y_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

- Równanie okręgu

Równanie okręgu o środku $S = (a, b)$ i promieniu $r > 0$ w postaci kanonicznej:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

- Współrzędne wektora, długość wektora, działania na wektorach

Dane są punkty $A = (x_A, y_A)$ oraz $B = (x_B, y_B)$. Współrzędne wektora $\overrightarrow{AB}$ zaczepionego w punkcie A:

$$\overrightarrow{AB} = [x_B - x_A, y_B - y_A]$$

Jeżeli $\vec{u} = [u_1, u_2]$ oraz $\vec{v} = [v_1, v_2]$ są wektorami oraz $a \in \mathbb{R}$, to:

$$\vec{u} + \vec{v} = [u_1 + v_1, u_2 + v_2] \qquad a \cdot \vec{u} = [a \cdot u_1, a \cdot u_2]$$

Długością $|\vec{u}|$ wektora $\vec{u} = [u_1, u_2]$ nazywamy liczbę

$$|\vec{u}| = \sqrt{(u_1)^2 + (u_2)^2}$$

- <u>Pole trójkąta</u>

  Pole trójkąta ABC o wierzchołkach $A = (x_A, y_A)$, $B = (x_B, y_B)$ oraz $C = (x_C, y_C)$ jest równe:

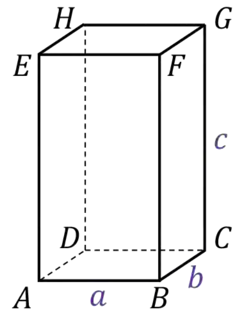
$$P_{\Delta ABC} = \frac{1}{2} \cdot |(x_B - x_A)(y_C - y_A) - (y_B - y_A)(x_C - x_A)|$$

12. STEREOMETRIA

- <u>Prostopadłościan</u>

$$P_c = 2(ab + bc + ca)$$
$$V = abc$$

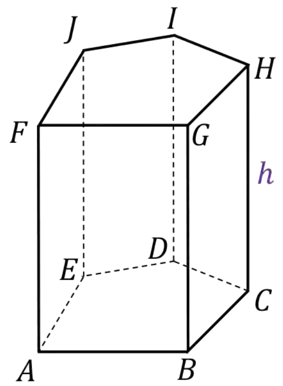
gdzie a, b, c są długościami krawędzi prostopadłościanu



- <u>Graniastosłup prosty</u>

$$P_b = Ob \cdot h$$
$$V = P_p \cdot h$$

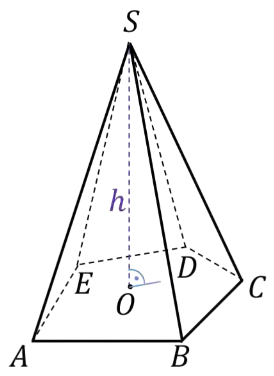
gdzie Ob jest obwodem podstawy graniastosłupa,
natomiast h – wysokością graniastosłupa.



- <u>Ostrosłup</u>

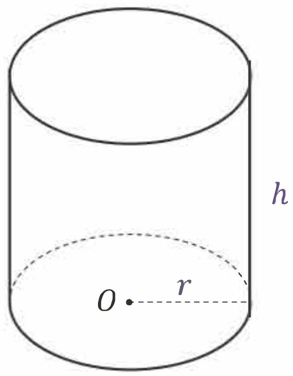
$$V = \frac{1}{3} \cdot P_p \cdot h$$

gdzie h jest wysokością ostrosłupa.



- <u>Walec</u>

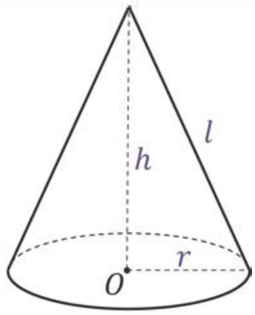
$$P_b = 2\pi rh$$
$$P_c = 2\pi r(r+h)$$
$$V = \pi r^2 h$$



gdzie h jest wysokością walca, O – środkiem symetrii podstawy walca, r – promieniem podstawy walca.

- <u>Stożek</u>

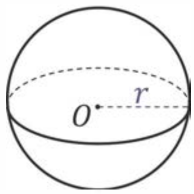
$$P_b = \pi rl$$
$$P_c = \pi r(r+l)$$
$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$



gdzie r jest promieniem podstawy stożka, h – jego wysokością, natomiast l – tworzącą stożka. Punkt O jest środkiem symetrii podstawy stożka.

- <u>Kula</u>

$$P_c = 4\pi r^2$$
$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$



gdzie r jest promieniem kuli, natomiast O – środkiem symetrii kuli.

13. RACHUNEK PRAWDOPODOBIEŃSTWA

- <u>Własności prawdopodobieństwa</u>

Niech Ω będzie niepustym zbiorem wszystkich zdarzeń elementarnych doświadczenia losowego, natomiast P – prawdopodobieństwem określonym na podzbiorach zbioru Ω. Wtedy:

$P(A') = 1 - P(A)$	gdzie A' oznacza zdarzenie przeciwne do zdarzenia $A \subset \Omega$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$	dla każdych zdarzeń $A, B \subset \Omega$

- Schemat Bernoullego

Próbą Bernoullego nazywamy doświadczenie losowe, w którym otrzymujemy jeden z dwóch możliwych wyników. Jeden z nich nazywamy sukcesem, a drugi – porażką. Jeżeli prawdopodobieństwo sukcesu jest równe p, to prawdopodobieństwo porażki jest równe $q = 1 - p$.

Schematem Bernoullego nazywamy ciąg niezależnych powtórzeń prób Bernoullego. W schemacie Bernoullego prawdopodobieństwo $P_n(k)$ uzyskania w n próbach dokładnie k sukcesów ($0 \leq k \leq n$) jest równe:

$$P_n(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

- Prawdopodobieństwo warunkowe

Niech A, B będą zdarzeniami losowymi zawartymi w Ω, przy czym $P(B) > 0$. Prawdopodobieństwem warunkowym $P(A|B)$ zdarzenia A pod warunkiem zaistnienia zdarzenia B nazywamy liczbę:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

- Twierdzenie o prawdopodobieństwie całkowitym

Jeżeli zdarzenia losowe $B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$

to dla każdego zdarzenia losowego $A \subset \Omega$ prawdziwa jest równość:

$$P(A) = P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)$$

- Twierdzenie Bayesa

Jeżeli zdarzenia losowe $A, B_1, B_2, \ldots, B_n$ zawarte w Ω spełniają warunki:

1. $B_1, B_2, \ldots, B_n$ są parami rozłączne, tzn. $B_i \cap B_j = \emptyset$ dla $i \neq j$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$
2. $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n = \Omega$
3. $P(B_i) > 0$ dla $1 \leq i \leq n$
4. $P(A) > 0$

to dla każdego k ($1 \leq k \leq n$) prawdziwa jest równość:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A|B_1) \cdot P(B_1) + P(A|B_2) \cdot P(B_2) + \ldots + P(A|B_n) \cdot P(B_n)}$$

14. PARAMETRY DANYCH STATYSTYCZNYCH

- Średnia arytmetyczna

Średnia arytmetyczna $\bar{a}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest równa:

$$\bar{a} = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

- Średnia ważona

Średnia ważona $\bar{s}$ z liczb $a_1, a_2, \ldots, a_n$, którym przypisano dodatnie wagi – odpowiednio: $w_1, w_2, \ldots, w_n$, jest równa:

$$\bar{s} = \frac{w_1 \cdot a_1 + w_2 \cdot a_2 + \ldots + w_n \cdot a_n}{w_1 + w_2 + \ldots + w_n}$$

- Mediana

Medianą uporządkowanego w kolejności niemalejącej zbioru n danych liczbowych $a_1, a_2, \ldots, a_n$ jest:

– dla n nieparzystych: $a_{\frac{n+1}{2}}$ (środkowy wyraz ciągu)

– dla n parzystych: $\frac{1}{2} \cdot \left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ (średnia arytmetyczna dwóch środkowych wyrazów ciągu)

15. POCHODNA FUNKCJI

- Pochodna sumy, różnicy, iloczynu i ilorazu funkcji. Pochodna funkcji złożonej

$[c \cdot f(x)]' = c \cdot f'(x)$ dla $c \in \mathbb{R}$

$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$

$[f(x) - g(x)]' = f'(x) - g'(x)$

$[f(x) \cdot g(x)]' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right]' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$ gdy $g(x) \neq 0$

$\left[g\big(f(x)\big)\right]' = g'\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$

- Pochodne wybranych funkcji

Niech a, b, c, r będą dowolnymi liczbami rzeczywistymi.

funkcja	pochodna funkcji
$f(x) = c$	$f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$
$f(x) = ax^2 + bx + c$	$f'(x) = 2ax + b$
$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$
$f(x) = \frac{a}{x}$	$f'(x) = -\frac{a}{x^2}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$
$f(x) = \operatorname{tg} x$	$f'(x) = \frac{1}{(\cos x)^2}$
$f(x) = e^x$	$f'(x) = e^x$

gdzie e jest liczbą Eulera; $e \approx 2{,}72$

- Równanie stycznej

Jeżeli funkcja f ma pochodną w punkcie x_0, to równanie stycznej do wykresu funkcji f w punkcie $\left(x_0, f(x_0)\right)$ dane jest wzorem:

$$y = a(x - x_0) + f(x_0)$$

gdzie

$$a = f'(x_0)$$

Potrzebujesz pomocy w przygotowaniu się do matury?

[SPRAWDŹ AMzP]